**35.** **Формула Тейлора для функции двух переменных . Теорема о среднем**

**Формула Тейлора для функции двух переменных**

Пусть функция f(x,y) имеет полные производные вплоть до n-го порядка включительно в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Введём дифференциальный оператор

\mathrm{T}=(x-x_0)\dfrac {\partial} {\partial x}+(y-y_0)\dfrac {\partial} {\partial y}.

Тогда разложением в ряд Тейлора функции f(x,y) по степеням (x-x_0)^k и (y-y_0)^k в окрестности точки (x_0, y_0) будет

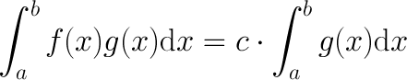
f(x,y)=\sum\limits_{k=0}^n \dfrac {\mathrm{T}^k f(x_0,y_0)} {k!} + R_n(x,y),

где R_n(x,y) — остаточный член в форме Лагранжа:

R_n(x,y)=\dfrac {\mathrm{T}^{(n+1)} f(\xi,\zeta)} {(n+1)!},\ \xi \in [x_0,x],\ \zeta \in [y_0,y]

В случае функции одной переменной \mathrm{T}=(x-x_0)\dfrac d {dx}, поскольку для функции одной переменной частная производная тождественно равна полной. Аналогично формула распространяется на функции от любого числа переменных, меняется только число слагаемых в операторе \mathrm{T}.

**Теорема о среднем**  
**Формулировка первой теоремы о среднем**Если функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4799.png и http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4800.png интегрируемы по Риману на некотором сегменте http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4586.png и функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4800.pngявляется знакопостоянной (то есть http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4801.png или http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4802.png ) на указанном сегменте, тогда

  
Здесь величина http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4656.png удовлетворяет неравенству

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4804.png  
Следствие 1. Если функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4799.png и http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4800.png интегрируемы на отрезке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4586.png и http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4801.png для любого http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4805.png:

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4806.png      http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4807.png  
тогда имеет место оценка:  
http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4808.png  
Следствие 2. Если функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4799.png - непрерывна и интегрируема на сегменте http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4586.png, а функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4800.png - интегрируема и знакопостоянна на этом сегменте, тогда существует такое значение http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4809.png, что

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4810.png

Следствие 3. Если функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4799.png является интегрируемой на отрезке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4586.png, а функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4811.png, то

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4960.png

Следствие 4. Если функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4799.png интегрируема на отрезке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4586.png, а функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4811.png, то

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4812.png  
**Формулировка второй теоремы о среднем**Если функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4799.png интегрируема на отрезке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4586.png, а функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4800.png монотонна на этом отрезке, то существует такая точка http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4809.png, что

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4813.png

Следствие 1. Если функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4799.png интегрируема на отрезке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4586.png, а функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4800.png является монотонно убывающей на этом отрезке и http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4814.png, тогда существует такая точка http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4809.png, что

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4815.png

Следствие 2. Если функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4799.png интегрируема на отрезке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4586.png, функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4800.png является монотонно возрастающей на рассматриваемом отрезке и http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4814.png, тогда существует такая точка http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4809.png, что  
http://www.webmath.ru/poleznoe/images/theorem/formules_4816.png